5 無字證明…第三眼的開啟

數學經文

眼睛是靈魂之窗，兩眉之間的第三眼是心靈之窗，唯有藉由眼睛的向外縝密觀察，才能取得養分，透過第三眼的內送滋養心靈。

左眼看到的代數式子與映入右眼的幾何圖形，把這兩眼所看的事物，想像成透過兩眉之間的第三眼，讓它們融合且柔和的在腦海中浮現，就如同 DNA 的雙螺旋般，親密的對應、穩穩的纏繞在一塊，這就是無字勝有字的神奇。

題目：已知正數 a,A,b,B,c,C 滿足

$$a+A=b+B=c+C=1.$$

利用幾何圖形證明

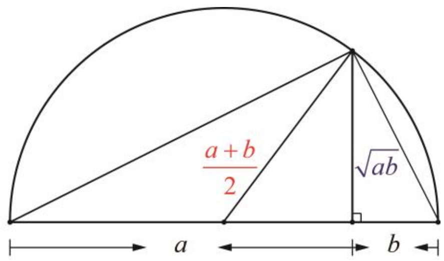
$$aB+bC+cA<1.$$

無字證明就是將欲證的式子（可能是等式，也可能是不等式）透過維妙維肖的幾何模型來闡釋。不需要透過太多的文字說明，就能清楚洞見欲證式子的正確性。精確的講，當你左眼聚焦於式子，而右眼縝密的觀照幾何模型，會有一種如 DNA 的雙螺旋般的對應與纏繞，透過兩眉之間的第三眼傳入腦海中。這種能力是需要練習的，讓我們進入練習！

5.1 基礎訓練

大家耳熟能詳的無字證明之例子莫過於算幾不等式的證明了，下圖就是算幾不等式的無字證明：

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

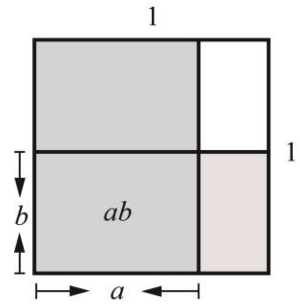


例題 1　設實數a,b滿足$0<a,b<1$。請以幾何圖形證明

$$1>a+b-ab.$$

【證】現在請用你的左、右眼觀察下圖中的左邊的不等式與右邊的模型：

$$1>a+b-ab.$$



你是否看出這例題的無字證明。

再做一題練習：

練習 1　已知a,b為正實數且滿足

$$a+b=\sqrt{3}.$$

請利用正三角形來證明不等式

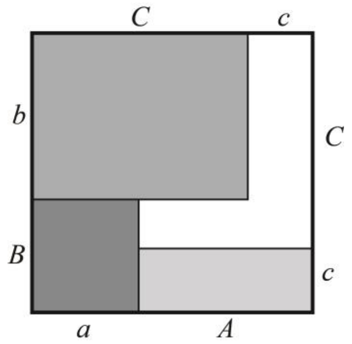
$$a+\sqrt{1+b^2}>2.$$

5.2 建立問題的幾何模型

本章題目有兩種不同的幾何模型證明方法，一種是正方形模型，另一種為正三角形模型。

讓我們一起欣賞這題目的兩種無字證明。

① 正方形模型證法：下圖是邊長為 1 的正方形



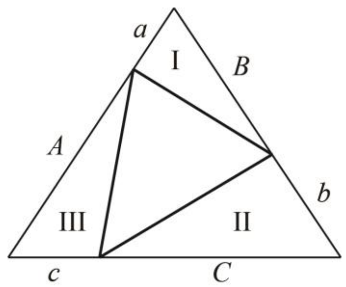
因為深淺不一的三塊小矩形之面積和為

$$aB+bC+cA,$$

所以

$$aB+bC+cA<\text{正方形面積}=1^2=1.$$

② 正三角形模型證法：下圖是邊長為 1 的正三角形



區域Ⅰ的小三角形面積為

$$\frac{1}{2}aB\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}aB;$$

區域Ⅱ的小三角形面積為

$$\frac{1}{2}bC\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}bC;$$

區域Ⅲ的小三角形面積為

$$\frac{1}{2}cA\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}cA.$$

三個小三角形面積和

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(aB+bC+cA)$$

小於邊長為 1 的正三角形面積

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

故

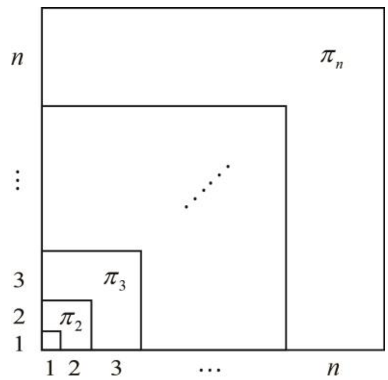
$$\frac{\sqrt{3}}{4}(aB+bC+cA)<\frac{\sqrt{3}}{4},$$

即

$$aB+bC+cA<1.$$

5.3 關於$1^3+2^3+\cdots+n^3$的無字證明

如右圖所示：π_1是單位正方形面積，π_2代表邊長$1+2$的正方形扣掉邊長為 1 的正方形面積，π_3代表邊長$1+2+3$的正方形扣掉邊長為$1+2$的正方形面積，…，π_n代表邊長$1+2+3+\cdots+n$的正方形扣掉邊長為$1+2+3+\cdots+(n-1)$的正方形面積。



(1) 求π_n的公式。

(2) 利用(1)推導級數和

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

的公式。

【解】解法如下：

(1) 根據定義

$$\begin{aligned}\pi_n&=\left(1+2+3+\cdots+n\right)^2-\left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right)^2\\&=\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2\\&=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}-\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}\\&=n^3.\end{aligned}$$

(2) 由(1)得到

$$\begin{aligned}1^3 &= \pi_1\\ 2^3 &= \pi_2\\ 3^3 &= \pi_3\\ &\vdots\\ n^3 &= \pi_n.\end{aligned}$$

將這些等式相加得到

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\pi_1+\pi_2+\pi_3+\cdots+\pi_n.$$

因為「$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\cdots+\pi_n$」剛好是「邊長$1+2+3+\cdots+n$的正方形之面積」，所以

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\cdots+\pi_n=\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2.$$

故推得

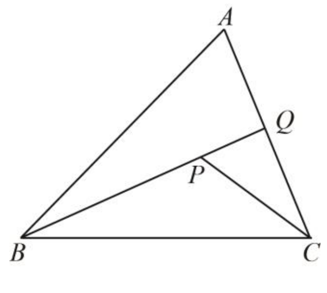
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

5.4 樞紐定理…三角形與橢圓的邂逅

樞紐定理是說：若 P 是三角形 ABC 內部的一點，則

$$PB+PC<AB+AC.$$

我們可以用如下的三角不等式來證明：考慮下圖



由三角形 ABQ 與三角形 QPC 的不等式，得

$$\begin{aligned}AB+AQ&>QB=QP+PB\\ QP+QC&>PC.\end{aligned}$$

將兩式相加並消去共同項 QP ，得

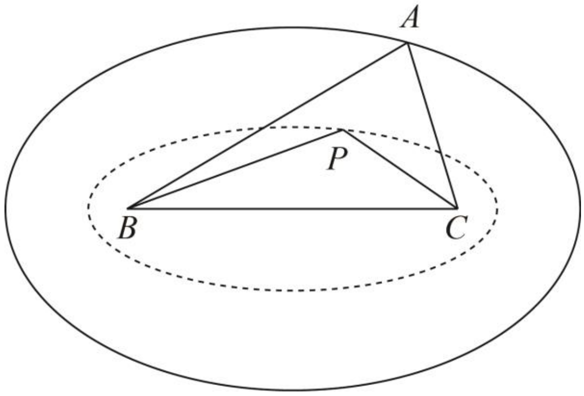
$$AB+AC>PB+PC.$$

這樣就證得樞紐定理。

如果你尚未學過橢圓或橢圓的定義，下一段可以略過。善用橢圓的定義，樞紐定理會變成很容易：

例題 3　利用橢圓的知識證明樞紐定理。

【證】到兩個相異點的距離和為一常數的點所形成之圖形，稱為一個橢圓，這兩個相異點就是所謂的焦點，而常數就是橢圓的長軸。現在以 B,C 為焦點畫兩個橢圓，其中一個通過 A 點，另一個通過 P 點（如下圖所示）



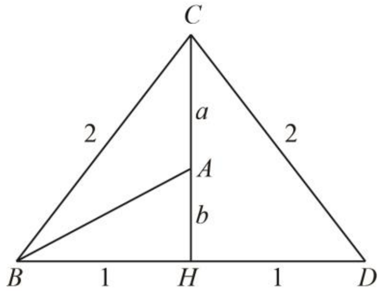
因為 P 點所在的橢圓比較小，A 點所在的橢圓比較大，所以根據定義

$$PB + PC < AB + AC.$$

無字證明⋯第三眼的開啟的練習題解答

練習 1

如右圖,考慮邊長為2的正三角形CBD,其中CH為高,$CA=a, AH=b$。



由直角三角形得到

$$AB=\sqrt{1^2+b^2}.$$

由三角形ABC的三角不等式得到$AB+AC>CB$,即

$$a+\sqrt{1+b^2}>2.$$